Praktisches Bsp.: (eines mehrstufigen Zufallsexperiments): zweifaches Würfeln: $X_1 : \mathbb{N}_6 \times \mathbb{N}_6 \to$

$z := \mathbb{N}_6 \times \mathbb{N}_6$ mit $X := \overset{\text{Identität}}{id}$, d.h. $X(m,n) = (m,n)$

$X_1(m,n) := m$; $X_2(m,n) := n$ (als Projektionen auf die 1 bzw. 2. Koordinate), P als Gleichverteilung auf $\Omega := \mathbb{N}_6 \times \mathbb{N}_6$

Behauptung: X_1, X_2 sind ~~un~~ unabhängig

Bem: Im Fall von abzählbaren Zustandsmengen $Z_1, Z_2, \ldots$ genügt es die Ereignisse $\{X_j = c_j\}$ $(c_j \in Z_j)$ zu betrachten. Hier gilt $Z_1 := Z_2 := \mathbb{N}_6$

Hier: Zahl von 1 bis 6

$\Rightarrow X_1^{-1}(c) = \{c\} \times \mathbb{N}_6$,

$X_2^{-1}(d) = \mathbb{N}_6 \times \{d\} \subset \Omega$

$\Rightarrow P\{X_1 = c\} = P(\{c\} \times \mathbb{N}_6) = \frac{6}{36} = 1/6 = P\{X_2 = d\}$

$\Rightarrow P\{X_1 = c\} \cdot P\{X_2 = d\} = 1/36 = P\{X_1 = c, X_2 = d\}$ $\Rightarrow$ Beweis Ende $\square$

27.03.14 Beispiel eines mehrstufigen Zufallsexperiments mit nicht-unabhängigen Projektionen X_n

suggestive Schreibweise

Markov-Kette: erklärt am Kellerbeispiel 'Irrfahrt'

Bsp.:  –> "1" –> absorbierend "Übergangswahrscheinlichkeiten" $q(j|i) = q(j|i)$

von i nach j für Zustände $i, j \in Z := \mathbb{N}_4$

? $\Rightarrow$ Zeilensummen der "stochastischen" Matrix $Q := (q(j|i))_{i,j \in \mathbb{N}_4}$ sind Eins: –> Zeilenweise laufen von 1 bis 4

$$\sum_{j=1}^{4} q(j|i) = 1 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_4$$

(Näheres zum Rechnen mit der "Übergangsmatrix" Q –> in Stochastische Prozesse SP)

Zusammenhang mit W-Modell: Die Menge $Z^{\mathbb{N}_0} := \{(z_0, z_1, z_2, \ldots)\ z_n \in Z, n \in \mathbb{N}_0\}$ aller Folgen $\mathbb{N}_0 \to Z$ stellt die Menge aller "Irrpfade" dar, wobei der Index n einen diskreten Zeitpunkt darstellt; d.h. die „Koordinate" z_n zeigt an, dass zum Zeitpunkt n der Zustand z_n vorliegt. z.B.:

z.B.: $z_0 := 3$; $z_1 := 2$; $z_2 = 3$; $z_3 = 2$; $z_4 := 1$; $z_5 := 1, \ldots$ stellt ein möglichen Pfad dar

Zufallsvariablen $X_n(z_0, z_1, z_2, \ldots) := z_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ $\Rightarrow$ Interessant: $P\{X_n = 3\} = ?$

? Was ist hier das P? $p(z_0, z_1, \ldots) := p_0(z_0) \prod_{n=1}^{\infty} q(z_n | z_{n-1})$ zu vorgegebener $p_0 : Z \to [0,1]$

$\overset{\mathbb{N}_4}{}$ ("Startverteilung")

$$(\Rightarrow P\{X_n \in \overset{\text{Teilmenge der Zustandsmenge}}{C}\} = \underbrace{\sum_{c \in C} P\{X_n = c\}}_{P \text{ von allen Folgen, wenn die } n\text{-te Komponente} = c \text{ ist}} = \sum_{c \in C} \sum_{z_n = c} p(\underbrace{z_0, z_1, \ldots}))$$

–> in der Regel nicht interessant, sondern das „asymptotische Verhalten" –> SP

27.03.2014

STPv

Wichtige diskrete W-Verteilungen

Def.: Für eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ (ℝ) heißt $\underset{E(X)}{EX} := \sum_{\omega\in\Omega} \underbrace{p(\omega)}_{\text{Einzelwahrsch.}} \underbrace{X(\omega)}_{\text{Wert selber an Stelle } \omega}$ der Erwartungswert von X

$$V(x) = \overset{\geq 0}{VX} := E\left((X-EX)^2\right) = E(X^2) - (EX)^2 \geq 0$$

Bsp.: Einfaches Würfeln: $\Omega := \mathbb{N}_6$ mit Gleichverteilung P $(\Rightarrow p \overset{\text{Konstant}}{\equiv} 1/6)$; X = Augenzahl; $X := \overset{\text{Identität}}{id} : \mathbb{N}_6 \to \mathbb{N}_6 \overset{\text{echte Teilmenge}}{\subset} \mathbb{R}$

$$\Rightarrow EX = \sum_{\omega\in\mathbb{N}_6} \overset{p}{\frac{1}{6}} \cdot \omega = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} \omega = \frac{1}{6} \sum_{\omega=1}^{6} \omega = \frac{21}{6} = \underline{3{,}5}$$

$$\Rightarrow V(x) = VX = ?\,;\; EX^2 = \sum_{\omega\in\mathbb{N}_6} \frac{1}{6}\cdot\omega^2 = \frac{1}{6}\sum_{\omega=1}^{6}\omega^2 = \frac{91}{6} = 15\tfrac{1}{6} \quad \Rightarrow VX = 15\tfrac{1}{6} - 3{,}5 = \underline{\underline{\frac{35}{12}}}$$

Denn Def.: $\sqrt{VX} =: \sigma X$ heißt Standardabweichung

A) Binomial-Verteilung Modell: "Einzeltrefferwahrscheinlichkeit" $p \in [0,1]$ → "Schussserie" (n Schüsse)

$$\boxed{p(\overset{\text{Treffer}}{m}) := \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}}$$ → Urne + 3 Kugeln mit Zurücklegen der Kugeln

mit Binomialkoeffizient $\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!}$ mit $0! = 1$ und $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1\cdot 2\cdot 3 \dots n$

Damit ist tatsächlich eine W-Fkt (Zähldichte) $p : \{0,1,\dots,n\} \to [0,1]$ definiert:

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \underset{a}{p^m} \underbrace{(1-p)}_{=b}^{n-m} \overset{\text{Binom.}}{\underset{\text{Formel}}{=}} (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

Die zugehörige W-Verteilung P heißt Binomialverteilung zu den Parametern $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$

B) Hypergeometrische Verteilung Urnenmodell: Schwarze und weiße (rote) Kugeln in einer Urne; Ziehen ohne Zurücklegen

Drei Parameter: n := Anzahl der Ziehungen; r := Anzahl roter Kugeln, s := Anzahl schwarzer Kugeln

Die Funktion $\boxed{p(m) := \frac{\binom{r}{m}\binom{s}{n-m}}{\binom{r+s}{n}}}$ definiert (wieder) eine W-Funktion auf $\{0,1,\dots r, r+1, \dots\}$. Sie entspricht der W-keit dafür, dass man m rote Kugeln beim n-maligen Ziehen ohne Zurücklegen erhält

C) Geometrische Verteilung "Einzeltrefferwahrscheinlichkeit" $p \in\,]0,1[$ mit $\boxed{p(m) := (1-p)^m \cdot p}$ beschreibt die W-keit dafür, dass man m-mal nicht trifft, bevor man beim (m+1)-ten Mal trifft

D) Poisson-Verteilung zum Parameter $\lambda > 0$ definiert $p(m) := e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}$ eine W-Fkt.

$$p : \mathbb{N}_0 \to [0,1] \quad \boxed{\sum_{m=0}^{\infty} p(m) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!}}_{=\exp(\lambda)} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1}$$

⇒ Verteilung	E	V	→ $\sigma = \sqrt{V}$
A) Binomial-V	$n\cdot p$	$n\cdot p(1-p)$	$\sqrt{np(1-p)}$
B) Hypergeometrische-V	$\frac{n\cdot r}{R}$ mit $R := r+s$	$\frac{nr}{R}\left(1-\frac{r}{R}\right)\cdot\left(1-\frac{n-1}{R-1}\right)$	⋮
C) Geometrische-V	$1/p - 1$	$\frac{1-p}{p^2}$	
D) Poisson-V	λ	λ	

Bem.: a) Für großes r und kleines n stimmt die W-Funktion der hypergeometrischen Verteilung ungefähr mit der der binomischen Verteilung überein.

b) Für große n und kleine $p > 0$, und zwar so, dass $\lambda := n \cdot p \leq 10$ und $n \geq 1500p$, gilt

$$\boxed{\binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \approx e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^m}{m!}}$$

Beispiel¹: $n := 100$, $p := 60\%$, $(m := 55)$ $\Rightarrow n \cdot p = 60 \not\leq 10 \rightarrow$ keine gute Approximation

Beispiel²: 500 Patienten, Medikament mit 1‰ Nebenwirkungen; Wie groß ist die W.keit, dass mind. drei Patienten Nebenwirkungen zeigen?

Komplementärereignis Trick!

Binomialverteilung mit Parametern $n := 500$; $p := 1‰$ $\rightarrow$ Gesucht: $\sum_{m=3}^{n} p(m) = 1 - \sum_{m=0}^{2} p(m) =: q$

$$= 1 - \sum_{m=0}^{2} \binom{500}{m} 0{,}001^m \, 0{,}999^{500-m}$$

$\rightarrow$ Approximation durch Poisson: $\lambda := n \cdot p = 500 \cdot 0{,}001 = 0{,}5 \ (\leq 10)$ ✓

$1500 \cdot p = 1500 \cdot 0{,}001 = 1{,}5 \ (\leq 500 = n)$ ✓

$$q \approx 1 - \sum_{m=0}^{2} e^{-0,5} \cdot \frac{0{,}5^m}{m!} = 1 - e^{-0,5} \cdot \left(1 + 0{,}5 + \frac{0{,}25}{2}\right) = 1 - e^{0,5} \cdot 1{,}625 \approx 0{,}0144$$

Antwort: Ca. 14‰

15) Eigenschaften von E und V

a) $E(aX + bY) = aEX + bEY$

c) $V(aX + b) = a^2 V(X) \Rightarrow \sigma(aX) = |a| \sigma X$

Im Schnitt die 0 da im 3,5 Schritt beim Würfeln

e) $VX > 0$, Standardisieren: $X^* = \frac{X - EX}{\sigma X} \Rightarrow EX^* = 0$, $VX^* = 1$ bei allen Standardisierten Zufallsvariablen

h) X, Y unabhängig $\Rightarrow E(XY) = EXEY$ und $V(X+Y) = VX + VY$

? i) Im Fall $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ gilt $\boxed{EX = \sum_{x=1}^{\infty} x\, p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{m=x+1}^{\infty} p(m) = \sum_{x=0}^{\infty} P\{X > x\}}$.

? k) Im Fall $a, X \geq 0$ gilt $\boxed{EX \geq a\, P\{X \geq a\}}$ (Markov-Ungleichung)

Beispiel: Die W-keit, dass ich mind. ⚄ $\hat{=}$ 5 würfel ist höchstens (nach Markov) $\frac{3{,}5}{5} = 0{,}7 = 70\%$ (Genau wäre: 33%)

Etwas Kombinatorik

- a) Permutation: Anzahl aller Möglichkeiten n Elemente linear anzuordnen: $n!$
- b) k-elementige Teilmengen: Anzahl der Möglichkeiten eine k-elementige Teilmenge aus einer n-elementigen Menge auszuwählen: $\binom{n}{k}$

$\binom{n}{k} \rightarrow \{$ Anzahl aller Teilmengen einer n-elementigen Menge: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$

- c) Multinomialkoeffizient: Anzahl der Möglichkeiten $n = n_1 + n_2 + \dots n_k$ Objekte linear anzuordnen, von denen jeweils n_j Objekte gleich sind ($j \in \mathbb{N}_k$): $\frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$ ("Multinomialkoeffizient").

Für $k = 2$ ist dies genau der Binomialkoeffizient $\frac{n!}{n_1!\, n_2!} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2} = \binom{n}{n - n_1}$

n Pascalsches Dreieck

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

0: 1
1: 1 1
2: 1 2 1
3: 1 3 3 1
4: 1 4 6 4 1
5: 1 5 10 10 5 1

27.03.14

d) Anzahl der Möglichkeiten n gleiche Objekte auf k verschiedene Fächer aufzuteilen $\binom{k+n-1}{n}$

?

Zahlenbeispiel: zwei Objekte in Fach 3, drei Obj. in Fach 4 und ein Objekt in Fach 7 mit $k=7$

Fächer	1	2	3	4	5	6	7
			∘∘	∘∘∘			∘
	1		100	1000		1	10

$n := 1 + 2 + 3 = 6$ → Binärzahl mit $k+n-1$ Stellen

e) (Partitionenzahl) Anzahl der Möglichkeiten eine n-elementige Menge in k Teilmengen mit jeweils $n_1, n_2, \dots n_k$ Elementen aufzuteilen: $a(b_1, b_2, \dots) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} \cdot \frac{1}{b_1!\, b_2! \dots}$

Hierbei bezeichnet b_l die Anzahl der l-elementigen Teilmengen, die bei dieser Aufteilung vorkommen.

(wenn also z.B. $n_1 = n_2 =: l < n_j$, dann $b_l = 2$)

- Zahlenbeispiel: eine Gruppe von 10 Leuten soll in 3 Mannschaften aufgeteilt werden, und zwar in 2 Dreiermannschaften und eine 4er-Mannschaft. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür (ohne Reihenfolge der beiden Dreier-Mannschaften)?

Antwort: $a(0,0,2,1) = \frac{10!}{3!\,3!\,4!} \cdot \frac{1}{2!\cdot 1!} = \underline{2100}$

Bem.: Es gilt $n = n_1 + n_2 + \dots + n \overset{\leftrightarrow (a1) b_{l\infty}}{=} \sum_{l=1}^{\infty} b_l \cdot l = \sum_{l=1}^{n} b_l \cdot l \Rightarrow \boxed{a(b_1, b_2, \dots) = \frac{n!}{\prod b_l!\, \underbrace{(l!)^{b_l}}_{*}}}$

14 **2.6 Formel des Ein- und Ausschließens (Siebformel).** P ist additiv (A) $n=2$: $P(A \cup B)$

$n=2$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - (A \cap B)$

$n=3$: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Allgemein wird folgende Formel per vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ bewiesen: $P(A_1 \cup \dots$

$$\boxed{P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le n} P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k})}$$

16 **2.8 Zentraler Grenzwertsatz** ← ZGWS Def.: Zwei Zufallsvariablen $X, Y: \Omega \to \mathbb{R}$ heißen identisch verteilt, wenn $\rho_X = \rho_Y$ (bzw. $P_X = P_Y$) gilt. Urbilder müssen zu den gleichen Wahrscheinlichkeiten führen

Satz (Zentr. Grenzwertsatz): Für eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen $X_1, X_2, \dots : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\sigma := \sigma X_1 = \sigma X_2 = \dots \overset{=0 \text{ nur bei einem einzelnen Wert für } P}{>} 0$ und beliebigen $\mu := EX_1 = EX_2 = \dots \in \mathbb{R}$ gilt für alle $b \in \mathbb{R}$ die Grenzwertformel.

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} P\left\{ \frac{X_1 + \dots + X_n - \overset{\text{Erwartungswert der Summe der Treffer}}{n \cdot \mu}}{\sigma \sqrt{n}} \le \underset{\text{Vergleichsparameter (Zahl)}}{b} \right\} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{\phi(b)}}$$

Standard-Normalverteilung

03.04.2014

Interpretation des ZGWS Für „große" $n \in \mathbb{N}$ gilt $P\left\{ \underbrace{\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}}}_{} \le b \right\} \approx \Phi(b)$

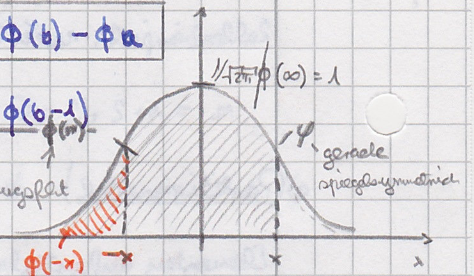
Die Zufallsvariable S_n^* ist die Standardisierung von $S_n := X_1 + \dots + X_n$ ≙ Summe

$E(X_1 + \dots + X_n) = EX_1 + \dots + EX_n \overset{\text{Def.}}{\underset{\mu}{=}} \mu + \dots + \mu = n \cdot \mu \Rightarrow \boxed{ES_n^* = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot (n\mu - n\mu) = 0}$

$V(X_1 + \dots + X_n) = V(S_n) \overset{\text{unabh.}}{=} \overbrace{VX_1}^{\sigma^2} + \dots VX_n \Rightarrow \sigma S_n = \sqrt{\sigma^2 + \dots + \sigma^2} = \sqrt{n \cdot \sigma^2}$

da $V(aX+b) = a^2 V(X) \to \sigma(aX+b) = |a|\sigma X$ $\Rightarrow \boxed{\sigma(S_n^*) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n\sigma^2} = 1}$

Folgerung aus dem ZGWS: $\boxed{P\{\sigma\sqrt{n}\cdot a \le S_n - n\mu \le \sigma\sqrt{n}\, b\} \approx \Phi(b) - \Phi(a)}$



Spezialfall: $a = -b$ $\quad P\{|S_n - n\mu| \le b\underbrace{\sigma\sqrt{n}}_{=\sigma S_n}\} \approx \Phi(b) - \Phi(-b) = 2\Phi(b) - 1$ (n muss groß sein)

Formel $\boxed{\Phi(-b) = 1 - \Phi(b)}$

Zahlenbeispiel: 100 facher Würfelwurf

$X_i :=$ Augenzahl beim i-ten Wurf ($i \in \mathbb{N}_{100}$) $\Rightarrow S_n = S_{100}$ = Augensumme mit $ES_n = n \cdot \mu = 350$ ($\mu = 3{,}5$)

und $\sigma S_n = \sqrt{100}\cdot\sigma = \sqrt{100}\sqrt{\frac{35}{12}} \approx 17$

Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme im Intervall $350 \pm b\cdot 17$ ist:

b	$2\cdot\Phi(b) - 1$	
1	0,682	≈ 68%
2	0,954	≈ 95%
3	0,997	≈ 100%

→ z.B. 68% im Intervall [333, 367] und 95% im Intervall [316, 384] und ≈ 100% zwischen [299, 401]

Bem. zur Güte der Approximation: Es sollte die Bedingung $\boxed{\sigma S_n > 3}$ eingehalten werden

Approximation der Binomial-Verteilung $S_n :=$ „Treffersumme" (bei n „Schüssen") bei Einzeltreffer-W-keit $p \in]0,1[$ $\Rightarrow ES_n = n\cdot p$; $\sigma S_n = \sqrt{np(1-p)}$ (laut Tabelle für Binomial-Verteilung)

$\boxed{P\{S_n - np \le b\sqrt{np(1-p)}\} \approx \Phi(b)}$ mit $p \overset{!}{>} 3$

Schwaches Gesetz der großen Zahlen: $\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \le \varepsilon\right\} = 1$ für alle $\varepsilon > 0$

Interpretation: Im Mittel wird schließlich der Erwartungswert erreicht (→ Mittelwert := Erwartungswert)

③ Das stetige Wahrscheinlichkeitsmodell

z.B. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ = abzählbar → überabzählbar = nicht abzählbar z.B. $\mathbb{R}$

Voraussetzung: Ereignismenge Ω überabzählbar; typischerweise $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ bzw. „gewisse" Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{Q}$ ist abzählbar) wie z.B. Intervalle von $\mathbb{R}^n$ d.h. $]a_1,\dots,b_1[\times \dots \times]a_n,\dots,b_n[$ bzw. auch mit teilweise geschlossenen Klammern.

eine Wkeit, da man nicht mehr zählen kann

Def: Eine stetige Fkt. $\varrho: \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ heißt W-Funktion oder auch Dichte-Funktion, wenn gilt $\int_\Omega \varrho = 1$

Bsp.: $\Omega := [a,b]$, $P([c,d]) := \frac{d-c}{b-a}$ (Intervalllänge) für $a \le c < d \le b$; $= \frac{1}{b-a}\int_c^d 1\,dx$ $\;\varrho\cdot(b-a)$ „$\varrho = P'$" Ableitung

(Gleichverteilung auf Intervall $[a,b]$)

Def.: $EX := \int_\Omega \varrho X$ (falls konvergent) heißt Erwartungswert einer Zufallsvariablen $X: \Omega \to \mathbb{R}$

Bem.: Wie im diskreten Fall ist $P_X := P \circ X^{-1}$ (Urbild) (mit $X^{-1}(G) := \{\omega \in \mathbb{R} \mid X(\omega) \in G\}$) eine W-Verteilung auf $\mathbb{R}$.

Def.: Die Fkt. $F_X(x) := P_X(]-\infty, x]) \overset{Def.}{=} P\{X \le x\}$ heißt die (kumulative) Verteilungsfkt. von X

Wichtiges Bsp.: $\varrho := \varphi: \mathbb{R} \to [0,1]$ mit „gaußscher Glockenfunktion" $\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$, siehe Graphik oben

X standard normalverteilt, d.h. $P\{X \le x\} = \Phi(x)$ $\Rightarrow \boxed{F_X = \Phi}$ bedeutet X ist standard normalverteilt

Mit anderen Worten: Φ ist also die Verteilungsfkt. einer bel. standard-normalverteilten Zufallsvariablen (nach $\mathbb{R}$)